

## Caracterización térmica de sólidos en condiciones periódicas no estacionarias

Thermal characterization of solids under non-stationary periodic conditions

**Rodney Hechavarría Díaz**

Universidad Estatal de Milagro, Ecuador  
rhechavarriad@unemi.edu.ec  
<https://orcid.org/0000-0002-0195-6157>

**Jorge Tomas Holguín Anzules**

Universidad Estatal de Milagro, Ecuador  
jholguina7@unemi.edu.ec  
<https://orcid.org/0000-0003-4454-4184>

### RESUMEN

El problema de la ecuación parabólica del calor unidimensional ha sido ampliamente estudiado en diversas condiciones y escenarios, tanto en regímenes estacionarios como no estacionarios y fuentes externas de calor periódicas y no periódicas. Cuando las condiciones de contorno varían periódicamente en el tiempo, tradicionalmente se ha asumido dos cuestiones: i) otorgar de forma arbitraria la componente dependiente del tiempo, lo que simplifica en gran medida la resolución analítica del desafío matemático, ii) priorizar el estudio del problema de la barra sólida seminfinita, por encima de la barra sólida finita. En este trabajo, presentamos una solución para la ecuación parabólica del calor unidimensional en una barra sólida finita, cuando rige un flujo externo de calor periódico que varía en el tiempo. El problema físico se plantea para  $t \geq 0$  y  $0 \leq x \leq l$ , se resuelve utilizando el Método de Separación de Variables. En la frontera  $x = l$  se establece un flujo de calor sinusoidal dependiente del tiempo, mientras que en  $x = 0$  se fija la temperatura. La distribución de temperatura  $T(x, t)$  es calculada de forma analítica, comprobando que ésta en el interior oscila con la misma frecuencia que la fuente externa de calor incidente, pero con cierta diferencia de fase, la que es función de las propiedades térmicas del material.

**Palabras claves:** Calor, flujo, transferencia, periódico, conductividad, difusividad.

### ABSTRACT

The problem of the one-dimensional parabolic heat equation has been widely studied under various conditions and scenarios, both in steady and non-stationary regimes and in periodic and non-periodic external heat sources. When the boundary conditions vary periodically in time, two issues have traditionally been assumed: i) arbitrarily giving the time-dependent component, which greatly simplifies the analytical resolution of the mathematical challenge, ii) prioritizing the study of the problem of the semi-infinite solid bar, above the problem of finite solid bar. In this work, we present a solution to the one-dimensional parabolic heat equation in a finite solid bar, when a time-varying periodic external heat flux governs. The physical problem takes place for  $t \geq 0$  and  $0 \leq x \leq l$ , it is solved using the Variable Separation Method. At the boundary  $x = l$  a time-dependent sinusoidal heat flow is established, while at  $x = 0$  the temperature is fixed. The temperature distribution  $T(x, t)$  is calculated analytically, verifying indeed that it oscillates inside the bar with the same frequency as the external source of incident heat, however with a time-phase difference that depends on the thermal properties of the material.

**Keywords:** Heat, flow, transfer, periodic, conductivity, diffusivity.

### INTRODUCCIÓN

El concepto de onda se ha extendido a numerosos fenómenos correspondientes a situaciones físicas descritas por un campo variable en el tiempo que se propaga tanto en el espacio como en el tiempo. La física de ondas térmicas se está convirtiendo en una herramienta valiosa en el estudio de los parámetros de los materiales, así como en la industria de los semiconductores para caracterizar el proceso de fabricación de dispositivos electrónicos (Abbas & Berto, 2018) y (Hobiny & Abbas, 2018). Estas ondas se han vuelto de gran interés para la explicación del efecto fotoacústico y otros fenómenos fototérmicos, en los que se basan muchas técnicas de medición no destructivas. (Li, 2018) y (García, Amaya & Correa, 2018)

Cuando un material se somete a calentamiento o enfriamiento no estacionario, su perfil de temperatura interna se da en términos de tiempo y posición espacial (Bluman & Cole, 1969) y (Gueye y Lissy, 2016)

La conducción resultante se puede analizar combinando la Ley de Fourier con un balance de flujo de calor (Marín, Marín, Hechavarría, 2005). La Sociedad Matemática del Sudeste Asiático, (2001) y Marín (2014) señalan que suponiendo una conductividad térmica constante, esto conduce a la conocida ecuación del calor parabólico.

La conducción de calor en sólidos es un proceso similar a la difusión, demostrado por muchos autores que sostienen que la difusión de energía térmica, en un sólido calentado periódicamente, está bien descrita en términos de ondas térmicas. (Salazar, 2006) y (Marín, 2007)

Por el contrario, para algunos autores la analogía de las ondas no siempre es del todo adecuada González, De La

Cruz & Gurevich, 1993). Se argumenta que la forma no ondulatoria es la razón por la cual los fenómenos de transporte de calor satisfacen una ecuación parabólica (con derivada de primer orden respecto al tiempo y de segundo orden respecto a la coordenada) y no una ecuación hiperbólica, que es la de una onda (con derivadas de segundo orden respecto al tiempo y coordenada).

El problema de la conducción directa de calor se ocupa de la determinación de la temperatura en puntos internos de una región cuando se especifican las condiciones iniciales y de contorno, la generación de calor y las propiedades del material.

En los últimos años se han desarrollado varias técnicas analíticas y numéricas como solución a los problemas de conducción de calor, como son:

- Marín, Marín-Antuña y Díaz-Arencibia, (2002) analizaron la conducción de calor en sólidos excitados por una fuente periódicamente dependiente del tiempo, que se encuentra comúnmente en experimentos fototérmicos.
- Ramadan y Al-Nimr (2009) estudiaron numéricamente los fenómenos de transmisión y reflexión de ondas térmicas inducidos por un flujo de calor límite pulsado en una losa de dos capas con una interfaz imperfecta.
- Ordóñez-Miranda y Alvarado-Gil (2020) investigaron el transporte de ondas térmicas unidimensionales en un medio seminfinito.
- Marín (2007) estudió el transporte de calor en fenómenos periódicos que varían en el tiempo dentro de los sólidos.

Sin embargo, estos estudios asumieron dos cuestiones: *a)* proporcionar arbitrariamente la componente temporal, lo que simplifica mucho la solución matemática, *b)* el problema de una barra sólida seminfinita es el que ha sido mayormente estudiado y, los de barra finita, no ofrecen soluciones analíticas (Sociedad Matemática del Sudeste Asiático, 2001) y (Mandelis, 2201)

En este trabajo, por lo tanto, se presenta una solución para la ecuación de calor parabólica unidimensional, considerando geometría unidimensional, en un sólido opaco de espesor  $l$ , rodeado por un medio adiabático, con una fuente de calor de excitación superficial armónicamente modulada.

Se calcula analíticamente la distribución de temperatura  $T(x,t)$  y se comprueba que ésta en el interior oscila con la misma frecuencia que la fuente de calor externa; con una diferencia de fase temporal que depende estrictamente de las propiedades térmicas del material. Es decir, se propone determinar propiedades térmicas como la conductividad y difusividad térmicas de sólidos, simplemente midiendo estas diferencias de fase temporal, estableciendo así una técnica de medición y caracterización de materiales sencillos y eficaces.

El objetivo de este trabajo es resolver analíticamente diferentes ecuaciones para llegar a una solución para la ecuación parabólica del calor unidimensional en una barra sólida finita, cuando rige un flujo externo de calor periódico que varía en el tiempo.

## MÉTODOS

Para el cumplimiento del objetivo planteado se emplea una estrategia analítica para la resolución de ecuaciones que describen la transferencia de calor a sólidos en condiciones periódicas no estacionarias, dicho procedimiento se basa en el desarrollo de soluciones exactas a un sistema de ecuaciones diferenciales que simula el comportamiento térmico del material, a partir de las propiedades físicas del sólido y las condiciones de frontera. La teoría de la difusión térmica se implementa para formular el problema y junto con algunos conceptos y técnicas de matemática se obtienen expresiones que pueden caracterizar la respuesta térmica en dependencia del tiempo y del espacio, de este modo el método permite realizar cálculos de respuesta térmica en aquellas aplicaciones donde el periodo en el que deben mantenerse las condiciones periódicas son relevantes.

El sustento teórico de la presente investigación se enfoca en conceptos fundamentales de la transferencia de calor, las ecuaciones diferenciales y el análisis matemático de procesos dinámicos:

Teoría de la Transferencia de Calor por Conducción:

Esta teoría, fundamentada en la Ley de Fourier, describe cómo el calor se transporta dentro de un sólido en función de grados temperatura, también es empleada para modelar el flujo térmico bajo condiciones periódicas (DeWitt, Bergman & Lavine, 2007)

Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs):

Las EDPs son técnicas matemáticas fundamentales para representar fenómenos de difusión térmica, en este escenario se buscan soluciones a ecuaciones de la forma de la ecuación de calor para condiciones no estacionarias (Strauss, 2007).

Análisis de Fourier:

Esta teoría es esencial para representar funciones periódicas y resolver problemas vinculado a la propagación de calor en régimen periódico, la serie de Fourier y la transformada de Fourier favorecen la descomposición y el análisis de los comportamientos térmicos (Kreyszig, 2011)

Teoría de Sistemas Periódicos en Estado No Estacionario:

Esta teoría trata cómo los sistemas responden a estímulos térmicos periódicos y cómo las oscilaciones térmicas se irradian mediante materiales. (Carslaw & Jaeger, 1986).

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### Una breve revisión del estado del arte:

La investigación desarrollada por Peña, Calderón & Muñoz (2022) denominado: Determinación de la difusividad térmica en sólidos mediante el análisis de la amplitud de la señal fotoacústica en configuración de transmisión de calor, proporciona un desarrollo teórico en una configuración de transmisión de calor, de una celda fotoacústica para la determinación experimental de la difusividad térmica de los sólidos. En el modelo de Rosencwaig y Gersho, se deriva una expresión que relaciona el valor  $f_0$  de la amplitud de la señal fotoacústica con la frecuencia de modulación de la radiación incidente, lo que permite, a su vez, ajustar algunos datos experimentales y así determinar la difusividad térmica de los materiales examinados.

El estudio desarrollado en el Centro de Investigaciones en Ciencias Aplicadas del Instituto Politécnico Nacional de México, titulado: Aplicación del Método de Angstrom para la caracterización térmica de fluidos, la investigación presenta una técnica que permite determinar la conductividad y la difusividad térmicas, en estado sólido, de una muestra de grasa orgánica a partir de datos de mediciones en los que se muestra la temperatura como función del tiempo, se recurre a la técnica de Angstrom que, a través de la reticulación de un flujo de calor periódico, obtiene la respuesta térmica que tienen los materiales, lo cual hace posible su caracterización de forma no estacionaria cíclica (Hernández, 2013)

También se consultó el estudio desarrollado en la Universidad Cornell, Estados Unidos, desarrollado por González, López y Vásquez (2021) titulado: Estructura interna y conducción de calor en sólidos rígidos: un enfoque de dos temperaturas, dicha investigación crea un modelo de dos temperaturas para describir el transporte de calor no Fourier en sólidos con estructura interna. A partir de los principios de la termodinámica de no equilibrio, se obtienen dos ecuaciones acopladas del tipo transporte de Fourier para las temperaturas que describen la conducción de energía en la respectiva escala de longitud, obteniendo resultados satisfactorios al reproducir los recientes resultados experimentales sobre la respuesta térmica de diferentes materiales estructurados utilizando este modelo.

### Soluciones para la ecuación parabólica del calor unidimensional en una barra sólida finita

Aquí se presenta una solución para la ecuación parabólica del calor unidimensional en una barra sólida finita, cuando rige un flujo externo de calor periódico que varía en el tiempo.

$$\begin{cases} T_{xx}(x, t) - \frac{1}{\alpha} T_t(x, t) = 0 \\ T(x, 0) = T_0 \\ T(0, t) = T_0 \\ T_x(l, t) = -\frac{1}{k} Q(t) \end{cases}, (t > 0; 0 < x < l) \quad (1)$$

Donde:  $T(x, t)$ , es la temperatura en función de la coordenada y el tiempo respectivamente,  $T_0$  representa el valor inicial de temperatura que permanece constante en la frontera  $x=0$ ,  $Q(t)$  es el flujo de calor periódico incidente en el extremo  $x=l$ ,  $k$  y  $\alpha$  equivalen a la conductividad y la difusividad térmicas respectivamente.

Figura 1. Esquema de la geometría unidimensional, en un sólido opaco de espesor  $l$ , rodeado por un medio de vacío, con una fuente de excitación

superficial armónicamente modulada.



Para la solución de este problema, se propone separar la función original  $T(x, t)$  en dos funciones independientes,  $u(x, t)$  y  $v(x, t)$ , de forma tal que la solución general será la suma de sus partes, expresadas en la ecuación (2):

$$T(x, t) = u(x, t) + v(x, t) \tag{2}$$

Sustituyendo la ecuación (2) en (1) se arriba a la siguiente expresión número (3):

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} [u_t(x, t) + v_t(x, t)] = u_{xx}(x, t) + v_{xx}(x, t) \\ \frac{1}{\alpha} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + \left[ v_{xx}(x, t) - \frac{1}{\alpha} v_t(x, t) \right] \\ \text{satisfaciendo:} \\ u(x, 0) = T_0 - v(x, 0) \\ u(0, t) = T_0 - v(0, t) \\ u_x(l, t) = Q(t) - v_x(l, t) \end{cases} \tag{3}$$

En la que  $v(x, t)$  puede quedar definida de la siguiente manera, expresado en (4):

$$\begin{cases} v(x, t) = T_0 + \frac{x^2}{2l} Q(t) \\ \text{satisfaciendo:} \\ v(0, t) = T_0 \\ v_x(l, t) = Q(t) \end{cases} \tag{4}$$

Así, para la función  $u(x, t)$ , se plantea el siguiente problema, representado en la ecuación 5:

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + h(x, t) \\ u(x, 0) = T_0 - \frac{x^2}{2l} Q(0) \\ u(0, t) = 0 \\ u_x(l, t) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Estas condiciones arriba expresadas son condiciones matemáticas suficientes, que deben cumplirse para la validez del método desarrollado de separación de variables en el primer problema de frontera.

Dónde:

$$h(x, t) = v_{xx}(x, t) - \frac{1}{\alpha} v_t(x, t) = \frac{1}{l} \left( Q(t) - \frac{x^2}{2\alpha} \dot{Q}(t) \right)$$

Según el principio de superposición, se tiene dos problemas a resolver:

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + u^{(2)}(x, t) \quad (6)$$

Primero: ecuación homogénea y condiciones de frontera, representado en (7).

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} u^{(1)}_t(x, t) = u^{(1)}_{xx}(x, t) \\ u^{(1)}(x, 0) = \phi(x) = T_0 - \frac{x^2}{2l} Q(0) \\ u^{(1)}(0, t) = 0 \\ u^{(1)}_x(l, t) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Segundo: ecuación no homogénea y condiciones iniciales y de frontera homogéneas, reflejado en la ecuación 8.

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} u^{(2)}_t(x, t) = u^{(2)}_{xx}(x, t) + h(x, t) \\ u^{(2)}(x, 0) = 0 \\ u^{(2)}(0, t) = 0 \\ u^{(2)}_x(l, t) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Las condiciones de frontera del problema de la ecuación 5, son de extraordinaria importancia y tiene soluciones no triviales solamente para determinados valores del parámetro  $\lambda$ , estos reciben el nombre de autovalores o valores propios de dicho problema. Las soluciones no triviales que les corresponden se llaman autofunciones o funciones propias del problema; el cual recibe el nombre de problema de autovalores o problema de Sturm-Liouville, ecuación 9a. Los valores propios (eigenvalores)  $\lambda_n$  y las funciones propias (eigenfunciones)  $X_n(x)$  se pueden escribir como:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2l} \right]^2 \\ X_n(x) = \text{Sin} \left[ \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right] \end{cases} \quad (9)$$

Ofrecen la solución de la ecuación:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \forall 0 < x < l \\ X(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases} \quad (9a)$$

Una vez halladas los autovalores y las autofunciones del problema (9a), se debe comprobar que éstas sean ortogonales entre 0 y l, es decir, que cumplan con la condición:

$$\int_0^l X_n(x) \cdot X_m(x) dx = \|X_n\|^2 \delta_{nm} \quad (9b)$$

Donde  $\delta_{nm}$  es la delta de Kronecker.

La solución de la ecuación 7 viene dada por la expresión:

$$u^{(1)}(x, t) = \int_0^l G_1(x, \xi, t) \cdot \phi(\xi) d\xi \quad (10)$$

Dónde:  $G_1(x, \xi, t)$  es la función de Green del problema 7; que, físicamente, es la respuesta (o sea, la temperatura) en la barra a una fuente unitaria, instantánea, en  $(t = 0)$  y puntual (en  $x = \xi$ ), de calor.

$$G_1(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|X_n\|^2} X_n(x) \cdot X_n(\xi) \cdot e^{-\alpha \cdot \lambda_n \cdot t}$$

y

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X(x)_n^2 dx = \frac{l}{2}$$

Para el Segundo problema, ecuación 8, la solución viene dada por:

$$u^{(2)}(x, t) = \int_0^t \int_0^l G_2(x, \xi, t - \tau) \cdot h(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (11)$$

Que, es una integral tipo convolución en el tiempo transcurrido (de  $0$  a  $t$ ) y en el espacio considerado (de  $0$  a  $l$ ) del producto de la homogeneidad de la ecuación por la función de Green en  $t - \tau$ .

Donde:  $G_2(x, \xi, t - \tau)$  es la función de Green del problema 8:

$$G_2(x, \xi, t - \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|X_n\|^2} X_n(x) \cdot X_n(\xi) \cdot e^{-\alpha \cdot \lambda_n \cdot (t - \tau)}$$

La función de Green es una función generalizada, que ofrece el comportamiento del núcleo de un operador lineal integral, en la resolución de ecuaciones diferenciales no homogéneas con condiciones de contorno especificada, tal y como se presentan en este trabajo; cuyo significado físico, como se sabe es la temperatura del punto  $x$  en el instante  $t$  si, en el instante inicial, en el punto  $x_0$  se desprendió la unidad de calor.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2) y (6), la solución general de la ecuación 1, queda expresada como:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{x^2}{2l} Q(t) + \int_0^l G_1(x, \xi, t) \cdot \phi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^l G_2(x, \xi, t - \tau) \cdot h(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (12)$$

Es muy importante destacar que la ecuación 12 propone una solución analítica general para todo tipo de comportamiento temporal del flujo de calor entrante,  $Q(t)$  para los valores de coordenada entre  $0 < x < l$ .

Tradicionalmente este problema se ha resuelto otorgando forma arbitraria a la componente dependiente del tiempo, lo que simplifica en gran medida la resolución analítica del desafío matemático; o también realizando el estudio del problema sólo para una barra sólida seminfinita, que también establece una solución a priori menos engorrosa. En este trabajo, recalamos, se presenta una solución para la ecuación parabólica del calor unidimensional en una barra sólida finita, para cualquiera sea el régimen de flujo externo de calor variable en el tiempo.

La distribución normalizada de la variación de la temperatura en espacio y tiempo se mostrará a continuación en las

siguientes figuras, en dependencia del régimen de flujo de calor externo. Nótese que la temperatura permanece constante en la frontera  $x=0$ , para todos los casos, como se estableció en la ecuación 1.

**Flujo externo sinusoidal**

Si como caso particular  $Q(t)$  posee la forma sinusoidal:  $Q(t)=\frac{1}{2}Q_0[1+\text{Cos}(\omega_0t)]$ , la ecuación 12 se convierte en:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{x^2 Q(t)}{2l} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &A_n(1 - e^{-\alpha\lambda_n t}) + (B_n - C_n)e^{-\alpha\lambda_n t} + \\ &D_n(e^{-\alpha\lambda_n t} - \text{Cos}(\omega_0 t) + \chi_n \cdot \text{Sin}(\omega_0 t)) + \\ &E_n \left( \text{Cos}(\omega_0 t) + \frac{1}{\chi_n} \text{Sin}(\omega_0 t) - e^{-\alpha\lambda_n t} \right) \end{aligned} \right\} \times \text{Sin} \left[ \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right] \tag{13}$$

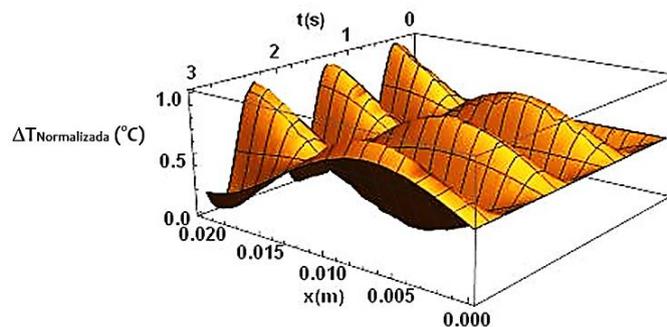
Dónde:  $\omega_0$  es la frecuencia angular de la fuente externa de calor (recordar  $\omega_0=2\pi f_0$ ):

$$\left\{ \begin{aligned} A_n &= \frac{16l^2 Q_0}{\pi^3 \alpha (2n+1)^3} \\ B_n &= \frac{4T_0}{(2n+1)\pi} \\ C_n &= \frac{16l Q_0 [(-1)^n \pi (2n+1) - 2]}{\pi^3 (2n+1)^3} \\ D_n &= \frac{4l^2 Q_0 [(-1)^n \pi (2n+1) - 2]}{\pi^3 \alpha (2n+1)^3 (\chi_n^2 + 1)} \\ E_n &= \frac{\alpha \pi Q_0 (2n+1)}{4(l\omega_0)^2 (\chi_n^2 + 1)} \end{aligned} \right. \tag{14}$$

En la ecuación 14 se presentan el valor de los coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  y  $E_n$ , establecidos en la ecuación 13; todos dependen del término enésimo y de las condiciones iniciales del problema.

El comportamiento de la solución de la ecuación 13, se muestra a continuación en la figura 2.

**Figura 2.** Distribución de temperatura (normalizada) en el espacio y el tiempo, para  $l=0.02\text{m}$ , área frontal  $A=1.13 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , conductividad térmica  $k=399 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ , difusividad térmica  $\alpha=1.43 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ , flujo inicial de calor  $q_0=0.10\text{W}$ , frecuencia angular  $\omega_0=2\pi \text{ rad/s}$  (o frecuencia,  $f_0=1\text{Hz}$ ) correspondiente a una barra sólida de cobre.

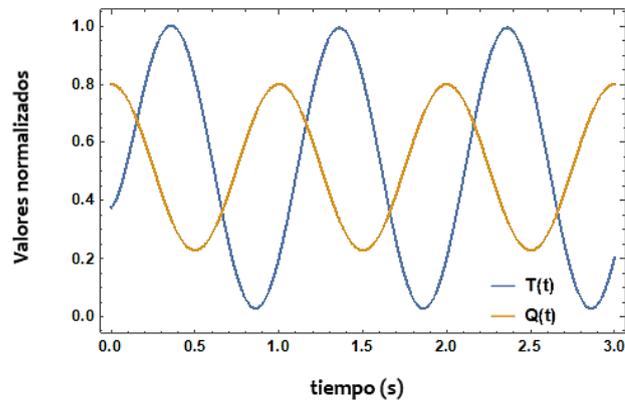


**Caracterización de materiales mediante flujo de calor externo sinusoidal**

Para algunos autores la analogía de las ondas no siempre es del todo adecuada (Marín, 2007), sin embargo, las figuras 2 y 3 junto a la ecuación 13 respaldan, las teorías basadas en un tratamiento ondulatorio de la propagación del calor,

utilizadas con éxito para interpretar los datos de experimentos térmicos (Marín, Marín & Hechavarría, 2005), (Salazar, 2006) y Díaz-Arancibia, (2002).

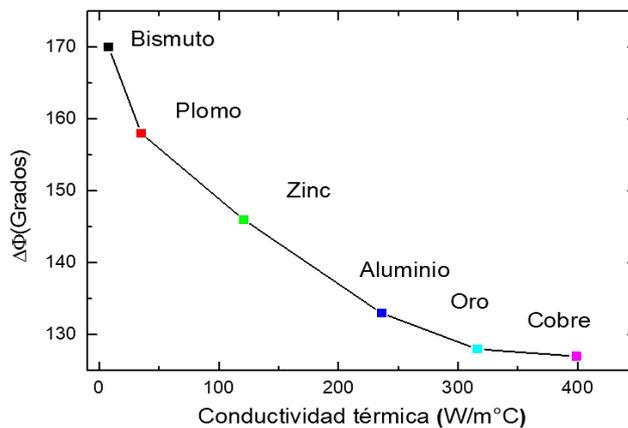
**Figura 3.** Dependencia temporal del flujo de calor (Q) y la temperatura (T), en la superficie frontal en el punto  $x=l$ , longitud  $l=0.02m$ , área frontal  $A=1.13 \times 10^{-4} m^2$ , conductividad térmica  $k=399 W/m \text{ } ^\circ C$ , difusividad térmica  $\alpha=1.43 \times 10^{-7} m^2/s$ , flujo inicial de calor  $q_0=0.10W$ , frecuencia angular  $\omega_0=2\pi \text{ rad/s}$  (o frecuencia,  $f_0=1Hz$ ) correspondiente a una barra sólida de cobre.



La figura 3 muestra gráficamente el comportamiento sinusoidal de la temperatura debido al flujo de calor periódico en la superficie frontal de una muestra de cobre, en  $x=l$ , como se indica en la figura 1. La temperatura dentro de la barra sólida oscilaría con la misma frecuencia  $f_0$  de la fuente externa generadora del flujo calórico; sin embargo, con cierta diferencia de fase entre estas oscilaciones, distintiva de cada material.

En este caso de estudio, para una muestra de cobre, la diferencia de fase resultó ser:  $\Delta\Phi=127 \text{ grados}$ . La figura 4 modela lo que sería la relación entre la diferencia de fase y la conductividad térmica ( $\Delta\Phi$  vs.  $k$ ) en varios materiales con diferentes características térmicas.

**Figura 4.** Grafica de la diferencia de fase vs. Conductividad térmica ( $\Delta\Phi$  vs.  $k$ ), para diferentes muestras de materiales diseñados con longitud  $l=0.02m$ , área frontal  $A=1.13 \times 10^{-4} m^2$  y flujo de calor incidente con frecuencia  $f_0=1Hz$ .



Al observar el comportamiento de la gráfica en la figura 4, se evidencia que la diferencia de fase entre el flujo de calor externo periódico incidente y la propagación de la temperatura, depende sustancialmente de las propiedades térmicas del material; asimismo, esto se evidencia en las ecuaciones 13 y 14, solución analítica del problema planteado en la ecuación 1, motivo de este estudio. Por lo tanto, al menos para los rangos de frecuencias estudiados alrededor de  $f_0 \sim 1Hz$ , se puede proponer este método para caracterizar térmicamente a muestras sólidas de materiales diversos.

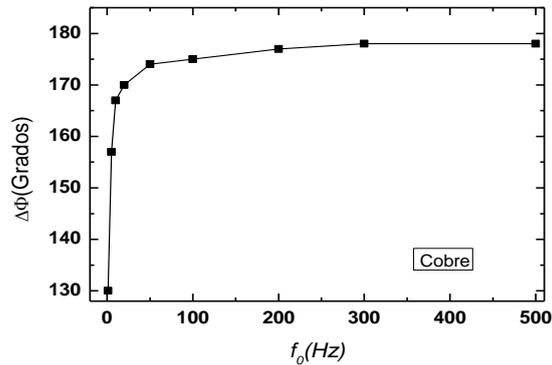
Para ello sólo habría que monitorear la variación de la temperatura en la frontera  $x=l$ , de la barra sólida y comparar su fase con la fuente de calor periódica externa incidente, la que es controlada por el investigador.

**Caracterización de materiales mediante espectro de frecuencias. Propuesta**

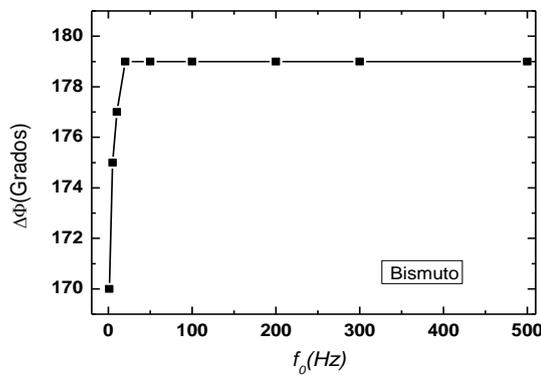
La Figura 4 nos lleva a otra idea innovadora, al hecho de que: *para cada material, la diferencia de fase también podría cambiar, al variar la frecuencia del flujo externo.* En este caso se podría establecer un espectro de respuesta, de desfase versus

frecuencia, para cada material ( $\Delta\Phi$  vs.  $f_0$ ) como muestra la figura 5 (a) para los casos de cobre y 5 (b) para el bismuto respectivamente.

**Figura 5 (a)** El desfase de una barra sólida de cobre varía cerca de 40 grados, a medida que la frecuencia incidente cambia de 1 a 25Hz aproximadamente.



**Figura 5 (b)** El desfase de una barra sólida de bismuto varía cerca de 9 grados, a medida que la frecuencia incidente cambia de 1 a 25Hz aproximadamente.



La Figura 5 (a) y 5 (b) muestra gráficamente cómo la diferencia de fase temporal, para cobre y bismuto, depende de la frecuencia externa del flujo de calor. Para materiales de alta conductividad térmica, como el cobre, el desfase  $\Delta\Phi$  entre la función Temperatura  $T(t)$  y el flujo de calor externo  $Q(t)$ , se vuelve más sensible, variando casi 40 grados para frecuencias de 0 a 300 Hz; mientras que los materiales de baja conductividad térmica, como el bismuto,  $\Delta\Phi$  varía menos de 10 grados. Es decir, para materiales de baja conductividad térmica se requiere un sensor de alta resolución.

Si se mira más detenidamente las figura 5a y 5b, se aprecia que la mayor variación del desfase  $\Delta\Phi$ , ocurre aproximadamente hasta ciertos valores de la frecuencia, del flujo externo incidente; a partir de éstas se nota que el desfase permanece prácticamente constante. Esto nos induce a la siguiente idea, que para cada material exista una frecuencia umbral, la cual indicaría que  $\Delta\Phi$  permanecería constante, a partir de ésta.

Por ejemplo, en la figura 5a, se aprecia que, para el cobre, un buen conductor térmico, esta frecuencia umbral se pudiera establecer cerca de 500Hz; sin embargo, para el bismuto, un mal conductor de calor, la frecuencia umbral se pudiera establecer cerca de los 30Hz. Es decir, a priori se puede apreciar que en los buenos conductores térmicos la frecuencia umbral es más alta que en los malos conductores térmicos. Asimismo, la variación del desfase con la frecuencia:  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta f}$  es mayor en los buenos conductores con respecto a los no tan buenos.

Por otra parte, de las gráficas 5 a y b, se aprecia que la dependencia del desfase con la frecuencia  $\Delta\Phi(f)$  toma la forma de una función exponencial creciente de tipo asintótica, de la forma:

$$\Delta\Phi(f) = A(1 - e^{-Bf}) \tag{15}$$

Donde A y B, sería parámetros de ajuste, los cuales pueden ser característicos de cada material.

Si bien estos resultados esbozados en esta última sesión 3.3, no son aún del todo concluyentes, quedan como propuesta para un nuevo estudio más detallado sobre el tema.

Los resultados anteriores expresados en las ecuaciones 13, 14 y figuras 3 y 4 fundamentalmente, correspondientes a

la sesión 3.2, nos impulsan a pronosticar que la metodología descrita en dicha sesión constituye una manera no muy compleja de caracterizar materiales sólidos homogéneos y compactos, especialmente diseñados en forma de pequeñas barras cilíndricas.

## CONCLUSIONES

Este trabajo se ocupó de la conducción de calor en muestras excitadas por fuentes externas de calor periódicas, se resolvió analíticamente la ecuación del calor en condiciones de frontera no estacionarias, en una barra sólida finita, para todo tipo de fuente de calor externa, sin asumir ningún elemento a priori, en la dependencia temporal, quedando demostrado que la temperatura oscila y se propaga con la misma frecuencia que la fuente de calor  $Q(t)$  pero con cierto desfase  $\Delta\phi$ , con respecto a éste.

Se evidenció que la diferencia de fase encontrada, entre la temperatura y flujo de calor externo, depende de las propiedades térmicas del material; por lo que esta técnica se propone como un método sencillo para caracterizar de forma experimental muestras de materiales sólidos, también se muestran consideraciones preliminares acerca de la fuente de información espectral que deja la figura 5 y que, a partir de su análisis se podría, asimismo, proponer como una futura técnica de caracterización de materiales sólidos y homogéneos.

Los hallazgos aquí mostrados proporcionan herramientas para optimizar el diseño de sistemas térmicos en aplicaciones industriales y tecnológicas, permiten también caracterizar el comportamiento térmico del sólido bajo estas condiciones, demostrando que es posible resolver analíticamente la ecuación parabólica del calor unidimensional en una barra sólida finita sometida a un flujo externo de calor periódico que varía en el tiempo.

Las implicaciones económicas del presente estudio radican en el aporte que hace para las industrias de la metalurgia, la construcción y la electrónica, donde hay una necesidad de comprender y controlar la transferencia de calor en los procesos de producción, también permite aumentar la eficiencia térmica y reducir las pérdidas de energía obteniendo costos operativos más baratos y una mayor viabilidad económica a largo plazo. Desde una perspectiva social, este trabajo contribuye a disminuir el consumo energético y las emisiones asociadas, promoviendo una mayor sostenibilidad ambiental, asimismo se mejora la calidad de vida al desarrollar materiales y dispositivos más eficientes para aplicaciones en calefacción, refrigeración y generación de energía.

Las limitaciones del presente estudio radicarón en la simplificación del modelo ya que para el análisis se consideraron condiciones ideales como homogeneidad del material, propiedades térmicas constantes y ausencia de efectos no lineales, lo que restringió su aplicabilidad a materiales heterogéneos o en condiciones de extremo. Otra limitación estuvo dada en que los resultados están restringidos únicamente a flujos externos periódicos; por lo tanto, no se incluyen condiciones de contorno más complejas que involucren fenómenos importantes como la convección o la radiación: La última limitación estuvo dada en la validación experimental limitada ya que a pesar de que el modelo matemático resulta ser efectivo, se tendría que considerar integrar en el modelo un enfoque experimental práctico, el cual permita validar su uso en un contexto más específico.

El presente estudio constituye base y a la vez se convierte en líneas de investigación para futuras investigaciones, ya que crea las bases para investigar esquemas térmicos en materiales compuestos o con propiedades térmicas dependientes de la temperatura, los hallazgos mostrados también sirven como punto de partida para elaborar modelos más complejos que tomen en cuenta las no linealidades en la transferencia de calor.

Esta investigación no solo evidencia la solución práctica a un problema térmico significativo en el área científica y de la ingeniería, si no que también ofrece oportunidades para diseñar modelos más sofisticados y aplicables, que generarán beneficios económicos, sociales y ambientales concretos.

## REFERENCIAS

- Abbas, I, Alzahrani, F. y Berto, F. (2018) The effect of fractional derivative on photo-thermoelastic interaction in an infinite semiconducting medium with a cylindrical hole *Engineering Solid Mechanics*, vol. 6, pp. 275-284
- Bluman, G.W. y Cole, J. D. (1969) The general similarity solution of the heat equation, *Journal of mathematics and mechanics*, vol. 18, n° 11, pp. 1025 - 1042.
- Camilli, F. (2017) Parabolic models for chemotaxis on weighted networks. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 108, n° 4, pp. 459-480.
- Carslaw, H. S., & Jaeger, J. C. (1986). *Conduction of Heat in Solids* (2nd ed.). Oxford University Press.
- García, E, Amaya, R y Correa, R. (2018) Estimation of thermal properties of a solid sample during a microwave heating process, *Applied Thermal Engineering*, vol. 129, pp. 587-595.
- González, A, De la Cruz y Gurevich, Y.G (1996) Electron and phonon thermal waves in semiconductors: An application to photothermal effects. *Journal of applied physics*, vol. 80, n° 3, pp. 1726-1730.
- González-Nárvaez, R. E., López de Haro, M., & Vázquez, F. (2021). Estructura interna y conducción de calor en sólidos rígidos: un enfoque de dos temperaturas. Recuperado de [https://arxiv.org/abs/2106.01323?utm\\_source=chatgpt.com](https://arxiv.org/abs/2106.01323?utm_source=chatgpt.com)

- Gueye, M. y P. Lissy, P. (2016). Singular optimal control of a 1-D parabolic-hyperbolic degenerate equation,» *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 22, nº 4, pp. 1184-1203.
- Hobiny, A. y Abbas, I. (2018) DPL model of photo-thermal interaction in an infinite semiconductor material containing a spherical hole, *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 133, pp. 1-12
- Hernández, E. (2013) Aplicación del Método de Angstrom para la caracterización térmica de fluidos. Trabajo opcionado para obtener el grado de maestro en tecnología avanzada. Recuperado de:  
[https://www.academia.edu/83413475/Aplicaci%C3%B3n\\_del\\_m%C3%A9todo\\_de\\_Angstrom\\_para\\_la\\_caracterizaci%C3%B3n\\_t%C3%A9rmica\\_de\\_fluidos?utm\\_source=chatgpt.com](https://www.academia.edu/83413475/Aplicaci%C3%B3n_del_m%C3%A9todo_de_Angstrom_para_la_caracterizaci%C3%B3n_t%C3%A9rmica_de_fluidos?utm_source=chatgpt.com)
- Incropera, F. P., DeWitt, D. P., Bergman, T. L., & Lavine, A. S. (2007). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer* (6th ed.). John Wiley & Sons.
- Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). Wiley.
- Li, Z. (2018) Interstitial photoacoustic technique and computational simulation for temperature distribution and tissue optical properties in interstitial laser photothermal interaction, *Journal of Innovative Optical Health Sciences*, vol. 11, nº 1, p. 1750011.
- Marin, E. (2007) The role of thermal properties in periodic time-varying phenomena,» *European journal of physics*, vol. 28, nº 3, p. 429.
- Marín, A, Marín-Antuña, J y Díaz-Arencibia, P (2002) On the wave treatment of the conduction of heat in photothermal experiments with solids. *European journal of physics*, vol. 23, nº 5, p. 523.
- Marín, J, Marín, R y R. Hechavarría (2005) Hyperbolic heat diffusion in photothermal experiments. *J. Phys. IV France*, vol. 125, pp. 365-368.
- Marín, J, M (2014) *Métodos matemáticos de la física*, La Habana: Editorial Universitaria.
- Mandelis, A (2001) *Green Functions and Mathematical Methods of Diffusion-Wave Fields*, New York: Springer-Verlag.
- Ordóñez-Miranda, J. y Alvarado-Gil, J.J. (2010) Exact solution of the dual-phase-lag heat conduction model for a one-dimensional system excited with a periodic heat source» *Mechanics Research Communications*, vol. 37, nº 3, pp. 276-281.
- Peña-Rodríguez, G., Calderón, A., & Muñoz-Hernández, R. A. (2015). Determinación de la difusividad térmica en sólidos mediante el análisis de la amplitud de la señal fotoacústica en configuración de transmisión de calor.
- Ramadan, K y Al-Nimr, M. A. (2009) Thermal wave reflection and transmission in a multilayer slab with imperfect contact using the dual-phase-lag model. *Heat transfer engineering*, vol. 30, nº 8, pp. 677-687.
- Salazar, A. (2006) Energy propagation of thermal waves 27.6 (2006): 1349. *European journal of physics*, vol. 27, nº 6, p. 1349.
- Strauss, W. A. (2007). *Partial Differential Equations: An Introduction* (2nd ed.). Wiley
- Sociedad Matemática del Sudeste Asiático (2001) Southeast Asian bulletin of mathematics, *Southeast Asian Mathematical Society*, vol. 25.